

★ ★
Exercice 1

Voir correction

On cherche à déterminer l'ensemble des fonctions $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ vérifiant les trois conditions suivantes :

- $\forall z \in \mathbb{R}, f(z) = z$
- $\forall (z, z') \in \mathbb{C}^2, f(z + z') = f(z) + f(z')$
- $\forall (z, z') \in \mathbb{C}^2, f(z \times z') = f(z) \times f(z')$

- 1) Vérifier que les fonctions définies par $f(z) = z$ et par $f(z) = \bar{z}$ sont solutions du problème.
- 2) Réciproquement, supposons que f est une solution du problème.
 - a) Montrer que $f(i) = i$ ou $f(i) = -i$.
 - b) On suppose que $f(i) = i$, montrer qu'alors pour tout $z \in \mathbb{C}, f(z) = z$.
 - c) On suppose que $f(i) = -i$, montrer qu'alors pour tout $z \in \mathbb{C}, f(z) = \bar{z}$.
- 3) Conclure.

★ ★ ★
Exercice 2

Voir correction

Soit n un entier naturel.

- 1) Montrer à l'aide de la formule du binôme de Newton que $(1 + \sqrt{2})^n + (1 - \sqrt{2})^n$ est un nombre entier.
- 2) Justifier sans calculs que $(1 + i)^n + (1 - i)^n$ est un nombre réel.
- 3) Dans toute cette question on suppose que $n = 4k$ avec k un entier naturel.
 - a) Montrer que $(1 + i)^n = (-4)^k$.
 - b) Développer $(1 + i)^n$ à l'aide de la formule du binôme de Newton et montrer qu'on a :

$$\sum_{p=0}^{2k} (-1)^p \binom{4k}{2p} = (-4)^k$$

★ ★ ★
Exercice 3

Voir correction

Soit $n \geq 1$ un entier. On considère des nombres complexes $(a_n, a_{n-1}, \dots, a_0)$ tels que $a_n \neq 0$ et le polynôme P défini par $P(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0$

- 1) On suppose que P a n racines distinctes $z_1, z_2, \dots, z_n$. En passant par une forme factorisée de P , montrer que $z_1 z_2 \dots z_n = (-1)^n \times \frac{a_0}{a_n}$ et que $z_1 + z_2 + \dots + z_n = -\frac{a_{n-1}}{a_n}$. Ce résultat s'appelle la **formule de Viète**
- 2) On considère dans cette question le cas où $n = 3$ et où P a 3 racines distinctes z_1, z_2, z_3 .
En passant par une expression factorisée de P , exprimer $z_1 z_2 + z_1 z_3 + z_2 z_3$ en fonction des coefficients a_0, a_1, a_2, a_3 .
- 3) Soit $P(z) = 3z^3 + 5z^2 - 4z - 2$.
Soient a, b, c les racines de P . On admet qu'elles sont distinctes et on ne cherchera pas à les calculer.
 - a) Déterminer la valeur de $a + b + c$, de $a \cdot b \cdot c$ et de $ab + ac + bc$.
 - b) En déduire la valeur de $a^2 + b^2 + c^2$
 - c) Déterminer la valeur de $a^3 + b^3 + c^3$. On pourra se servir de l'expression $P(a) + P(b) + P(c)$.
- 4) En vous inspirant de la question précédente, trouver un triplet (x, y, z) solution du système suivant :

$$\begin{cases} x + y + z &= -2 \\ x^2 + y^2 + z^2 &= 26 \\ x^3 + y^3 + z^3 &= -38 \end{cases}$$

Correction des exercices

Correction de l'exercice 1 :

- 1) Pour $f(z) = z$ c'est évident, pour $f(z) = \bar{z}$ on a bien $\bar{\bar{z}} = z$ lorsque z est réel, et :

$$f(z + z') = \overline{z + z'} = \bar{z} + \bar{z}' = f(z) + f(z')$$

$$f(z \times z') = \overline{z \times z'} = \bar{z} \times \bar{z}' = f(z) \times f(z')$$

donc elle vérifie aussi les trois conditions.

- 2) a) $f(i^2) = f(i) \times f(i)$ d'après la troisième condition. Or $i^2 = -1 \in \mathbb{R}$ donc $f(i^2) = f(-1) = -1$ d'après la première condition. Cela signifie que $f(i)^2 = -1$

Correction de l'exercice 2 :

- 1) On a :

$$\begin{aligned} (1 + \sqrt{2})^n + (1 - \sqrt{2})^n &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \sqrt{2}^k + \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^k \sqrt{2}^k \\ &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \sqrt{2} (1 + (-1)^k) \end{aligned}$$

or $1 + (-1)^k = \begin{cases} 2 & \text{si } k \text{ est pair} \\ 0 & \text{si } k \text{ est impair} \end{cases}$ donc il ne reste que les termes pairs dans la somme :

$$= \sum_{k=0}^{E(n/2)} \binom{n}{2k} \sqrt{2}^{2k} \times 2 = \sum_{k=0}^{E(n/2)} \binom{n}{2k} 2^{k+1}$$

où $E(n/2)$ est la partie entière de $\frac{n}{2}$. Tous les termes de la somme sont des entiers donc le résultat est entier.

- 2) On a $(1 + i)^n + (1 - i)^n = (1 + i)^n + \overline{(1 + i)^n} = 2\operatorname{Re}((1 + i)^n) \in \mathbb{R}$.

- 3) a) Posons $z_k = (1 + i)^{4k}$. $z_0 = 1$ et $z_1 = (1 + i)^4 = 1 + 4i + 6i^2 + 4i^3 + i^4 = 1 + 4i - 6 - 4i + 1 = -4$.

Pour tout entier naturel k on a $z_{k+1} = (1 + i)^{4(k+1)} = (1 + i)^{4k+4} = (1 + i)^4 \times (1 + i)^{4k} = (-4) \times z_k$ donc z_k est une suite géométrique (à valeurs réelles) de raison -4 , on en déduit que pour tout entier naturel k : $z_k = (-4)^k$.

- b) On développe et on sépare la somme en termes pairs et impairs :

$$\begin{aligned} (1 + i)^n &= \sum_{j=0}^{4k} \binom{4k}{j} i^j \\ &= \sum_{p=0}^{2k} \binom{4k}{2p} i^{2p} + \sum_{p=0}^{2k-1} \binom{4k}{2p+1} i^{2p+1} \\ &= \sum_{p=0}^{2k} \binom{4k}{2p} i^{2p} + i \sum_{p=0}^{2k-1} \binom{4k}{2p+1} i^{2p} \end{aligned}$$

or pour tout entier p , $i^{2p} = (i^2)^p = (-1)^p$ est un réel donc :

$$= \sum_{p=0}^{2k} \binom{4k}{2p} (-1)^p + i \sum_{p=0}^{2k-1} \binom{4k}{2p+1} (-1)^p$$

et donc $\operatorname{Re}((1 + i)^n) = \sum_{p=0}^{2k} \binom{4k}{2p} (-1)^p$ et $\operatorname{Im}((1 + i)^n) = \sum_{p=0}^{2k-1} \binom{4k}{2p+1} (-1)^p$. Comme $(1 + i)^n$ est un réel, sa partie imaginaire est nulle et on a simplement :

$$(1 + i)^n = \sum_{p=0}^{2k} \binom{4k}{2p} (-1)^p$$

Correction de l'exercice 3 :

- 1) Si P admet n racines distinctes $z_1, \dots, z_n$ alors P se factorise en

$$P(z) = a_n(z - z_1)(z - z_2) \cdots (z - z_n)$$

En développant, le seul terme constant provient du produit des termes constant de chaque facteur, il est égal à :

$$a_n(-z_1)(-z_2) \cdots (-z_n) = (-1)^n a_n z_1 z_2 \cdots z_n$$

donc par identification des coefficients on a :

$$a_0 = (-1)^n a_n z_1 z_2 \cdots z_n$$

et en multipliant par $\frac{(-1)^n}{a_n}$ de chaque côté on obtient :

$$(-1)^n \frac{a_0}{a_n} = (-1)^{2n} z_1 z_2 \cdots z_n = z_1 z_2 \cdots z_n$$

En repartant de l'expression factorisée

$$P(z) = a_n(z - z_1)(z - z_2) \cdots (z - z_n)$$

et en développant, le terme de degré $n - 1$ est :

$$-a_n(z_1 + z_2 + \cdots + z_n)z^{n-1}$$

puisque les termes de degré $n - 1$ proviennent du choix d'un terme constant et de $n - 1$ termes z dans le produit $(z - z_1) \cdots (z - z_n)$.

Par identification des coefficients on a donc :

$$-a_n(z_1 + \cdots + z_n) = a_{n-1}$$

d'où

$$z_1 + z_2 + \cdots + z_n = -\frac{a_{n-1}}{a_n}$$

- 2) On suppose que $P(z) = a_3 z^3 + a_2 z^2 + a_1 z + a_0$ et que P admet 3 racines distinctes z_1, z_2, z_3 . Alors :

$$\begin{aligned} P(z) &= a_3(z - z_1)(z - z_2)(z - z_3) \\ &= a_3(z - z_1)(z^2 - z_2 z - z_3 z + z_2 z_3) \\ &= a_3(z - z_1)(z^2 - (z_2 + z_3)z + z_2 z_3) \\ &= a_3(z^3 - (z_2 + z_3)z^2 + z_2 z_3 z - z_1 z^2 + z_1(z_2 + z_3)z - z_1 z_2 z_3) \\ &= a_3(z^3 - (z_1 + z_2 + z_3)z^2 + (z_1 z_2 + z_1 z_3 + z_2 z_3)z - z_1 z_2 z_3) \\ &= a_3 z^3 - a_3(z_1 + z_2 + z_3)z^2 + a_3(z_1 z_2 + z_1 z_3 + z_2 z_3)z - a_3 z_1 z_2 z_3 \end{aligned}$$

donc par identification des coefficients on a :

$$\begin{cases} -a_3(z_1 + z_2 + z_3) &= a_2 \\ -a_3(z_1 z_2 z_3) &= a_0 \end{cases} \quad \text{comme dans la question 1}$$

et

$$a_3(z_1 z_2 + z_1 z_3 + z_2 z_3) = a_1$$

donc

$$z_1 z_2 + z_1 z_3 + z_2 z_3 = \frac{a_1}{a_3}$$

- 3) a) D'après les formules précédentes :

$$\begin{aligned} a + b + c &= -\frac{a_2}{a_3} = -\frac{5}{3} \\ abc &= (-1)^3 \times \frac{a_0}{a_3} = -\frac{-2}{3} = \frac{2}{3} \end{aligned}$$

et

$$ab + ac + bc = \frac{a_1}{a_3} = \frac{-4}{3}$$

b) On a $(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$ donc

$$\begin{aligned} a^2 + b^2 + c^2 &= (a + b + c)^2 - 2(ab + ac + bc) \\ &= \left(-\frac{5}{3}\right)^2 - 2 \times \left(\frac{-4}{3}\right) \\ &= \frac{25}{9} + \frac{8}{3} \\ &= \frac{49}{9} \end{aligned}$$

c) Suivons l'indication, on sait que $P(a) + P(b) + P(c) = 0$ donc :

$$\begin{aligned} 0 &= 3a^3 + 5a^2 - 4a - 2 + 3b^3 + 5b^2 - 4b - 2 + 3c^3 + 5c^2 - 4c - 2 \\ &= 3(a^3 + b^3 + c^3) + 5(a^2 + b^2 + c^2) - 4(a + b + c) - 6 \end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned} a^3 + b^3 + c^3 &= \frac{-5(a^2 + b^2 + c^2) + 4(a + b + c) + 6}{3} \\ &= \frac{-\frac{245}{9} - \frac{20}{3} + 6}{3} \\ &= -\frac{251}{27} \end{aligned}$$

4) x, y, z seront solution du système s'ils sont racine d'un polynôme P qui vérifie les bonnes relations coefficients racines. Soit a_0, a_1, a_2 trois réels et soit P la fonction polynôme définie par

$$P(t) = t^3 + a_2 t^2 + a_1 t + a_0$$

. Supposons que $P(t) = (t - x)(t - y)(t - z)$, alors $a_2 = -x - y - z = 2$ et $a_0 = -xyz$.

Comme $(x + y + z)^2 - (x^2 + y^2 + z^2) = 2(xy + xz + yz) = 2a_1$ on en déduit que $a_1 = \frac{(-2)^2 - 26}{2} = -11$.

On a donc :

$$P(t) = t^3 + 2t^2 - 11t + a_0$$

Comme $P(x) + P(y) + P(z) = 0$ on a :

$$x^3 + y^3 + z^3 + 2(x^2 + y^2 + z^2) - 11(x + y + z) + 3a_0 = 0$$

donc

$$-38 + 2 \times 26 - 11 \times (-2) + 3a_0 = 0$$

donc $a_0 = -12$. Finalement :

$$P(t) = t^3 + 2t^2 - 11t - 12$$

On constate que -1 est racine de P donc $P(t)$ se factorise par $(t + 1)$ et on trouve :

$$P(t) = (t + 1)(t^2 + t - 12) = (t + 1)(t - 3)(t + 4)$$

Les racines de P sont $-1, 3$ et -4 . En prenant $x = -1, y = 3$ et $z = -4$ on a bien :

$$x + y + z = -1 + 3 - 4 = -2$$

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1 + 9 + 16 = 26$$

$$x^3 + y^3 + z^3 = -1 + 27 - 64 = -38$$